هو

رساله فی حل مسائل السبع من الحلاصه اراى قواعد شریفه مهمه فی حلها حل سایر المسائل المشکله الحسابیه

بسم الله الرحمن الرحیم

منت بی عد و احصا آفریدگار واحدی راست که بدوران
دارای عطا بخش خطا پوش و خدیو مهر چهر فرشته هوش
شاهنشاه عصر و خضر دهر قهرمان عالم و خلاصه بنی آدم
وارث اورنگ کیان حارس ممالک ایران و مروج قواعد
ملت و ایمان پادشاه عدو بند کشور گشا سایه خداوند یکتا
السلطان بن السلطان بن السلطان ابو النصر و الفتح
ناصر الدین شاه قاجار خلد الله سلطانه و ادام الله
دولته پایه علوم بر فرق فرقدان رسیده و هر گونه دانش
و صنعتی درجه کمال گزیده کودکان دبستان از حسن تربیت
پادشاهش از دانایان سابق گوی سبق ربوده و جوانان
نوآموز از جهت حل کثیری از رموز بر دانشمندان سلف
برتری و تفوق جسته اشکال اشکال مشکله باقیه تا

۷۶۳۱

کنون باندك توجه متعلمین مدرسه دار الفنون سهل و
منحل کردیده و ابکار افکار از چهره ضمیر بحجره تحریر
جلوه ظهور یافته و در صحایف و رسائل صورت
ثبات بلکه رسم طبع و انطباع پذیرفت که عامه طالبین
انشاء الله محظوظ و بهره یاب کردند فنحمده علی نعمائه و
نشکره علی آلائه و نصلی و نسلم علی النبی و آله و بعد
چون در روزنامه وقایع دولت علیه نواب مستطاب والا
بتار مهر سپهر مجد و اقتدار خورشید فلك فضل و افتخار شهزاده
ازاده اعتضاد السلطنه و وزیر العلوم علیقلی میرزا دام اجلاله
العالی بجهة تشویق اهل دار الفنون تعریف و تحسین شاکردان
مدرسه مذکوره در مراتب علوم حساب و هندسه و غیرها
نموده بودند بعضی از مدعیان علوم از هر طرف بنای
مجادله کذاردند که کفته اند ۵ هر که کردن بدعوی افزاید
دشمن از هر طرف بر او تازد بعضی از آنقوم سؤال
از حل بعض مسائلی نمودند که در آخر کتاب خلاصة الحساب
قدوة المحققین و اسوة المدققین الشیخ بهاء الدین
العاملی اعلی الله مقامه ایراد یافته و در نیست که

بعض دیگر سؤال از بعضی مسائل دیگر نمایند لهذا این بنده
عبد الغفار ابن الاستاد الفاضل والنحریر الکامل علی محمد آزاد اصفهانی
در صدد تحقیق جواب این مسائل بر آمده عرض مینماید که عماد
الدین خوام بغدادی که یکی از علمای متقدمین در حساب و
هندسه است کتابی بنموده مسمی بفوائد البهائیه و در آخر آن کتاب سی و سه مسئله از
مسائل مشکله ایراد نموده و در ضمن آن بیان نمود که ما
نمیگوئیم که این مسئله را جواب ندارد بلکه میگوئیم که ما
نمیتوانیم این مسائل را جواب بگوئیم و اگر کسی از عهده حل
این مسائل برآید بدرستی که خدا تعالی عطا نموده است باو
از علم و فهم چیزی را که بما عطا نفرموده است و چونکه خلاصه
جناب شیخ اعلا الله مقامه مختصری است از آن کتاب لهذا آن
مسائل را مختصر فرموده اکتفا بهفت مسئله نموده اند و جهة
آنکه عماد الدین خوام اعتراف نموده بعجز خود و سایر
علمای آن عصر از حل آن مسائل آنستکه در حل این
مسائل محتاج میشوند بمعادلات چندی که غیر از مسائل
ستة جبریه مشهوره است و بتصرفات غریبه که بدان

متقدمین نرسیده چنانکه معلوم خواهد شد انشاء الله
وجمیع ان مسائل در این ایام از تاثیر اکسیر تربیت
بندگان اقدس شهریاری روح العالمین فداه منقح شده
جواب هر یک از انها واضح است بطریقی که مفصلا مذکور
میشود بواسطه انکه بحمد الله جمیع معادلات جبریه بر این بنده
وسایر اهل دار الفنون سهل و اسان است از هر درجه
که باشد میتوانیم از عهده حل ان برائیم چه مسائلی که
بصد مرتبه از اینها مشکل تر بوده حل نموده ایم ومع
ذلک معترفیم بعجز و قصور خود و شاید مسئله یافت
شود که ما نیز عاجز باشیم از حل ان قال الله تبارک وتعالی
وَمَا اُوتِیتُم مِنَ العِلمِ اِلَّا قَلِیلًا و بهمان قدر که متعلمین علم
هندسه و نوتخانه در علم جبر و مقابله ترقی دارند
در سایر علوم ریاضی از قبیل حساب و هندسه و علم
مساحت و علم مثلثات و لوکاریتم و جغرافیا و مناظر
و مرایا نیز ترقی دارند بلکه هر متعلمی در علم منسوب باو
مانند فزیک خوانان و اطبا و غیرهم بهمین مراتب در
علم خود ترقی کرده اند بواسطه انکه سرکار نواب اشرف

والا وزیر علوم که مدرسه مبارکه دار الفنون و متعلمین آن
که سپرده بایشان است خود در جمیع این علوم ماهر و با
بصیرتند و اهتمام ایشان در تربیت انها بی اندازه است
لهذا نمیتوانند در تحصیل کوتاهی نمایند و از اینجهة است که
هر یک از انها در مدة یکماه بقدری که در دو سه ماه ترقی
نمیکردند ترقی نموده اند عبث مردم خود را در امتحان انها
زحمت ندهند ای مگس عرصه سیمرغ نه جولانگه تو است
عرض خود میبری و زحمت ما میداری باری چونکه صاحب
خلاصه هفت مسئله ایراد نموده بودند بر تحقیق جواب همان
هفت مسئله اکتفا میکنم و ده قاعده که باصطلاح اهل اوروپا
فرمول میگویند از استنباطات خواطر خود که لازم میشود دانستن
انها در حل این مسائل و نظایر انها در این مختصر رساله درج
مینمایم و ختم مینمایم انرا باپرادیک تساوی مشکلی
که انرا به بیت و سر و جبر حل نمرده ام و بیان میکنم در
ضمن ان یکقاعده نادره اسان از استنباط خاطر خود
نیز که کفایت میکند در حل جمیع معادلات جبریه که مشتمل
باشند بر دو مجهول یا زیاده که جواب انها بصورت حل

اوروپا

اروپا خالی از صعوبت و اشکال نیست مخفی نماند
که آنچه از کتب علمای حساب و جبر و مقابله ایران و مغرب
زمین بنظر رسیده جمیع عبارت را بصراحت بیان میکنند
جز صفر و اعداد را که باین علامات ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥
٦ ٧ ٨ ٩ بیان کرده اند اما اهل اروپا تصرف نموده
تسهیل در عمل کرده اند و اکثر مطالب را بنشان و علامات
بیان میکنند مثلا علامت جمع این است + و علامت
تفریق این است − و علامت جذر این است √ و علامت
مال کعب کعب کعب کعب کعب این است ١٧ کعب
وهکذا و باین سبب بسیار مطالب بوجه مختصر و آسان
بیان می شود مثلا اهل ایران در زمان قدیم مینوشتند
ضلع اول ۲۵۶ بنابرانکه مال کعب الکعب فرض
شود در جمع شود با ضلع اول ۲۴۳ بنابرانکه
مال کعب فرض شود حاصل مساوی است به پنج
و اهل اروپا این مطلب را باین طور مینویسند

$$\sqrt[8]{256} + \sqrt[5]{243} = 5.$$

بنا بر این چون اختصار و تسهیل در عمل مطلوب است نه تقلید
قدما لابد ما نیز محتاج شدیم بوضع علامات چون اهل مدرسه
دار الفنون بکتب فرانسه مانوس اند بعلامات انها کفایت کردند
چه مقصود جز اختصار و تسهیل عمل چیز دیگر نیست و هر دو را انها بعلامات
که اهل فرانسه وضع نموده اند حاصل میشود علاوه بر این ربط و
اطلاع که از کتب ایشان که بی فائده نیست نیز حاصل میگردد بخلاف
انکه اصطلاح جدید و علامات تازه وضع میکردیم این فائده مفقود
بود و اگر کسی این علامات را نداند جز می بر ما نیست و بحثی بر ما
وارد نمیاید بل المرء عدو لما جهل امدیم بر سر مقصود و بالله
التوفیق **المسئلة الاولی** عشرة مقسومة بقسمین اذا زید علی
کل جزء ضرب المجتمع فی المجتمع حصل عدد مفروض **جواب**
تحقیق انستکه بگوئیم مقصود سائل از تقسیم نمودن عشره بدو قسم
یابد دو قسم است که هر قسمی عدد صحیح باشد و ان منحصر است به پنج صورت
(۱ , ۹) (۲ , ۸) (۳ , ۷) (۴ و ۶) (۵ و ۵) و معلوم است که
جز صورت اولی با هیچکدام از ان دو قسمت مجذور حقیقی نیست
مانند ۳ و ۷ و ۲ و ۸ یا انکه یک قسمت ان مجذور حقیقی است
قسمت دیگر ان اصم است مثل چهار ۴ و ۶ یا انکه مقصودش تقسیم عشره

بدو

بدو قسمت کیفما کان اعم از انکه هر دو قسمت صحیح مع الکسر باشد
یا یکی کسر فقط باشد و دیگری صحیح مع الکسر و علی ای نحو کان
اگر یک قسمت منطق باشد قسمت دیگر لا محاله اصم خواهد بود
باری اگر مقصود سائل ان باشد که باید تقسیم نمود عشره را
بدو قسمت صحیح منطق منحصر است جواب باینکه یک قسمت عشره
عدد یک باشد و قسمت دیگر عدد نه و قول سائل که گفته است
حصل عدد مفروض لا محاله ان عدد باید ۲۴ باشد و اگر بگوییم
که مقصودش تقسیم عشره است بدو قسمت صحیح اگرچه هر دو قسمت
یا یک قسمت عدد اصم باشد بر سائل لازم است که تعیین عدد
مفروض نماید مثلا بگوید حصل عشر وزن او حصل ثلثون او
حصل خمسون تا ما بیان کنیم که جواب مسئله چیست و یا انکه مسئله
مستحیل است زیرا که نتیجه این اعمال لا محاله اعداد مخصوصه
معینه است پس اگر سائل همان اعداد را فرض کرده باشد سؤال صحیح است
والا سؤال غلط خواهد بود و اگر بگوییم که مقصودش تقسیم
نمودن عشره است بدو قسمت کیفما کان در این صورت عدد
مفروض زیاده از پنجاه و دو نمیتواند بود تقریبا زیرا که بزرگترین
حاصلی که پیدا میشود از این اعمال وقتی است که تقسیم نماییم عشره را

بدو قسمت متساوی و نتیجه آن زیاده از پنجاه و دو نیست تقریبا

و بر سائل لازم است که عدد مفروض را معین نماید و چون

سائل فرض این عدد را ننموده مناسبی پنج فرض نمودیم و صورت

مسئله این خواهد شد عشرة مقسومة بقسمین کیفما کان

اذا زید علی کل جذره التقریبی او التحقیقی ضرب المجتمع فی

المجتمع حصل خمسة و ثلثون تقریبا جهة جواب این مسئله فرض

میکنیم یکی از دو قسمت عشره را x^2 پس قسمت دیگر این میشود

$10-x^2$ و پس از آن این تساوی حاصل می شود *

$35 = (\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2})(x^2+10-x^2)$

و پس از آن $\sqrt{10-x^2} = \frac{35-10x^2-10x^2+x^4+x^2}{x^2+x}$

و از اینجا $x^8+2x^7-19x^6-40x^5+150x^4+$

$+270x^3-900x^2-750x+1225=$

$-x^9-2x^8+9x^7+20x^6+10x^5$

و از اینجا $x^8+2x^7-18x^6-38x^5+141x^4+$

$+250x^3-910x^2-700x+1225=0$

پس عمل منتهی شد بیکتساوی مخلوطی از درجه هشتم که شامل

هشت جوابرا ولیکن جوابهائی که صدق میکند در این مسئله
دو جوابست ۱,۸۲۱۱۹ = جذر
۸,۱۷۸۸۱ = جذر وچون جذر یکی از دو قسمت عشره
فرض شده بود پس جواب اول یکقسمت انده وجواب دوم
قسمت دیگر است یعنی باید ده را تقسیم نمود باین دو قسمت
تا انکه بعد از عمل حاصل مساوی ۳۵ شود و سبب عجز قدما
از حل مسئله آنستکه منتهی میشود عمل باین معادله یکمال کعب
الکعب بعلاوه دو مال کعب بعلاوه ۱۴۱ مال المال بعلاوه
۲۵۰ کعب ۱۲۲۵ عدد مساوی میشود بر ۱۸ کعب الکعب بعلاوه
۳۸ مال الکعب ۱۰ مال بعلاوه ۷۰۰ شیء و بر هر محاسبی
معلوم است که قدما عاجز بوده اند از حل اینگونه معادلات

المسئلة الثانية مجذوران زدنا علیه عشرة کان للمجتمع جذرا
او نقصناها منه کان للباقی جذر **جواب** هرگاه بگوئیم که
مجذوران بصیغه تثنیه خوانده میشود و ضمیر علیه را بتاویل باو راجع
کنیم که حاصل معنی عبارت چنین شود که دو مجذور است که هرگاه زیاد
کنیم بر مجموع انها ده عدد یا کم کنیم از مجموع انها ده عدد بوده باشد
از برای مجتمع یا باقی جذر **جواب** میگوئیم که بنا بر این معنی دو اصل حاصل

ست

احتمال اول اینکه یکی از دو شرط زیاده و نقصان کافی باشد در تحقق صدق مسئله و احتمال ثانی انکه جمع بین الشرطین لازم باشد در تحقق مسئله اما بنا بر احتمال اول و بنا بر فرض انکه مقصود شرط زیاد کردن ده عدد باشد فرض میکنیم یکی از دو مجذور را x^2 و دیگری را y^2 پس این تساوی حاصل است (۱) $z^2 = 10 + y^2 + x^2$

فرض میکنیم

$$z - x - y = A.$$

$$z = A + x + y.$$

و

$$z^2 = A^2 + x^2 + y^2 + 2Ax + 2Ay + 2xy.$$

بعد از تفریق اول از تساوی اول حاصل میشود

$$10 = A^2 + 2Ax + 2Ay + 2xy.$$

$$(2A + 2x)y = 10 - A^2 - Ax.$$

$$y = \frac{10 - A^2 - 2Ax}{2A + 2x}.$$

در اینجا مقادیر نامعین فرض شده است A و x

پس حاصل میشود بجمله A و x و y و z این مقادیر

$A = \ldots\ldots, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots \frac{5}{6}, \ldots\ldots$

$z = \ldots\ldots \frac{23}{6}, \ldots\ldots$

و با

وبنا بر فرض انکه مقصود شرط نقصان ده عدد باشد فرض میکنیم
یکی از دو مجذور را x^2 ودیگری را y^2 پس این وقت
حاصل است $x^2+y^2-10=z^2$

فرض میکنیم $x+y-z=A$

$$z=x+y-A$$

$$z^2=x^2+y^2+A^2-2Ax-2Ay+2xy$$

$$-10=A^2-2Ax-2Ay+2xy$$

$$(2A-2x)y=A^2-2Ax+10$$

$$y=\frac{A^2-2Ax+10}{2A-2x}$$

$A=\ldots\ldots\ldots 2, 3, 4, \ldots\ldots$

$x=\qquad 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$y=\ldots\ldots\ldots 5, 2\frac{1}{2}, \ldots\ldots$

$z=\ldots\ldots\ldots 4, 2\frac{1}{2}, \ldots\ldots$

وهرگاه مسئله را بطور کلی ادا کنیم باین طریق می شود
$x^2+y^2\pm a=z^2$

بعد از عمل کردن این فرمول حاصل میشود $y=\frac{a-2Ax\mp A^2}{2A\pm 2x}$

اما بنا بر احتمال ثانی فرض میکنیم دو مجذور را یکی x^2

و دیگری y^2 پس این دو تساوی حاصل است

$$x^2+y^2+10=z^2$$

$$x^2+y^2-10=u^2$$

حال هرگاه عمل کنیم در تساوی اول بتنهائی حاصل میشود

نتیجه z و y دو سلسله مقادیر و هرگاه عمل کنیم در

تساوی دوم بتنهائی حاصل میشود نیز نتیجه z و y دو

سلسله مقادیر دیگر جستجو میکنیم در دو سلسله مقادیر اولی و

مقادیر نتیجه z و y بطوریکه حاصل جمع مجذورشان مساوی

شود بحاصل جمع دو مجذور z و y از دو سلسله مقادیر

دوم پس بعد از یافتن دو مقدار حقیقی خواهند بود از z

و y وجه دیگر فرض میکنیم این دو مجذور را یکی z و دیگری

y^2 پس این دو تساوی حاصل است $\begin{cases} x^2+y^2+10=z^2 \\ x^2+y^2-10=u^2 \end{cases}$ (1)

بعد از آنکه تفریق کنیم یکی از این دو تساوی را از دیگری این

تساوی حاصل است $z^2-u^2=20$ (2)

حال فرض میکنیم تفاضل این ریشهای این تساوی را

به A پس $z-u=A$; $z^2=A^2+u^2+2Au$

وبعد از گذاردن مساوی y^2 را در مساوی (۲) $A^2+2Ay=20$

پس (۳) $y^2=\frac{20-A^2}{2A}$ ، $y^2=\frac{20+A^2}{2A}$

حال در این مساوی A مقداریست نامعین پس مجموع y و y

جوابهای ما لانهایت له حاصل میشود ولیکن نمیتوانیم این

مقادیر را در مساوی (۱) بگذاریم زیرا که x^2+y^2 از ۱۰

اسقاط شده است پس بجهت اینکه مقدار A را معین نمائیم مساوی

y^2 را در مساوی (۱) بگذاریم پس حاصل میشود این مساوی

$$x^2+y^2+10=\left(\frac{20+A^2}{2A}\right)^2=\frac{400+A^4+40A^2}{4A^2}$$

$$x^2+y^2=\frac{400+A^4+40A^2}{4A^2}-10=\frac{400+A^4}{4A^2}$$

حال با این قسم عمل میکنیم (۴) $x^2+y^2=\frac{400+A^4}{4A^2}$

فرض میکنیم $x-y=B$.

و $x=B+y$.

و $x^2=B^2+y^2+2By$

بعد از گذاردن مساوی x^2 را در مساوی (۴) حاصل میشود

$$2y^2+B^2+2By=\frac{400+A^4}{2A^2}$$

و $y^2+By=\frac{400+A^4}{8A^2}-\frac{B^2}{2}=\frac{400+A^4-4A^2B^2}{8A^2}$

$$y=-\frac{B}{2}\pm\sqrt{\frac{400+A^4}{8A^2}-\frac{A^2B^2}{4}}=-\frac{B}{2}\pm\sqrt{\frac{400+2A^2-4AB^2}{16A^2}}$$

چون y باید مقدار حقیقی باشد پس آنچه در تحت رادیکال
واقع است باید مجذور حقیقی باشد و چون مخرج که $16A^2$ است
مجذور است پس صورت کسر نیز باید مجذور حقیقی باشد پس
فرض میکنیم او را مساوی q^2 و این تساوی حاصل است

$$800 + 2A^4 - 2A^2B^2 = q^2$$

و از این تساوی

$$B^2 = \frac{800 + 2A^4 - q^2}{4A^2}$$

و چون B^2 مجذور حقیقی است و مخرج کسر نیز مجذور حقیقی است
پس صورت کسر نیز باید مجذور حقیقی باشد و فرض میکنیم او را
مساوی p^2 پس این تساوی حاصل است $800 + 2A^4 - q^2 = p^2$

$$A^4 = \frac{q^2 + p^2 - 800}{2}$$

و

$$A = \sqrt[4]{\frac{q^2 + p^2 - 800}{2}}$$

و از این تساوی
پس مقدار A معین شد و p و q در این تساوی مقادیر
نامحدود ماند ولیکن باید دو مقداری فرض نمود که بعد از تفریق
نمودن ۸۰۰ را از حاصل جمع مجذورشان نصف باقی یک مثال
حقیقی باشد و بزودی میتوانیم تعیین p و q را
نمائیم زیرا که بعد از عمل زیر رادیکال حاصل را در مبدل المثال
جستجو میکنیم اگر یافت شد که ریشه او مساویست با [illegible] واگر

یافت

یافت نشد مقادیر دیگر فرض میکنیم و باید دانستکه p و q را نمیتوانیم مقادیری فرض نمائیم که جمع مجذورشان کمتر از ۱۰۰ باشد زیرا که اگر کمتر باشد باقی مانده منفی خواهد بود وعدد منفی پشه چهارم ندارد مثلا یافتیم بجهة p ، q

این دو مقدار را $p = ۲۴$ ، $q = ۱۶$

$q^۲ + p^۲ = ۸۳۲$ ، $A = \sqrt[۴]{\frac{۳۲}{۲}} = ۲$

و A را میگذاریم در تساوی (۳) پس بجهة v ، z

این دو مقدار حاصل میشود $v = ۴$ ، $z = \frac{۴}{۱}$

پس $x^۲ = ۱$ ، $y^۲ = ۲۵$ ، $z^۲ = ۳۶$ ، $v^۲ = ۱۶$

و هرگاه مجذور بصیغه مفرد خوانده شود عبارت باز صاحب دو احتمال خواهد بود یکی انکه مجذوری است که اگر ۱۰ بران افزوده شود مجذور باشد یا انکه ده از ان نقصان شود مجذور باشد و این معنی ظاهر عبارت خلاصه است و دیگری انکه مجذوری است که چون ده بران افزوده شود و ده از ان نقصان شود در هر دو حالت نیز مجذور باشد پس این مسئله نیز در حقیقت سه مسئله میباشد

اما بجهة فرض اول از احتمال اول فرض میکنیم ان مجذور را $x^۲$

پس این تساوی حاصل است (۱) $z^۲ = [illegible] + x^۲$

فرض میکنیم $y - x = A$

$y = A + x$

$y^2 = A^2 + x^2 + 2Ax$

بعد از گذاشتن او در مساوی (۱) این مساوی حاصل است

$A^2 + 2Ax = 10$

پس $x = \frac{10 - A^2}{2A}$

A در این مساوی مقدار نامعین است پس جهة x حاصل میشود این مقادیر

$A = 1, 2, 3$

$x = \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

و جهة فرض ثانی از احتمال اول این مساوی حاصل است

$x^2 - 10 = y^2$ (۱)

فرض میکنیم $x - y = A$

$x = A + y$

$x^2 = A^2 + y^2 + 2Ay$

پس از گذاشتن مساوی x^2 در مساوی اول حاصل میشود

و $A^2 + 2Ay = 10$

و $y = \frac{10 - A^2}{2A}$

و $x = \frac{10 + A^2}{2A}$

و نیز A در اینجا مقدار نامعین است پس حاصل میشود جهة x

و از این مقادیر

$$z = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{11}{2}, \frac{7}{2}, \frac{19}{6}, \ldots$$

اما بجهة احتمال ثانی این دو تساوی حاصل است

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 10 &= y^2 \\ x^2 + 10 &= z^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

و بعد از تفریق یکی از دو تساوی از دیگری این تساوی حاصل است

$$z^2 - y^2 = 20$$

و بقاعده که مذکور شد در احتمال اول این دو تساوی حاصل است

$$z = \frac{20 + A^2}{2A}$$

$$y = \frac{20 - A^2}{2A}$$

و A در این دو تساوی مقداری است نامعین پس بجهة z^2 و y^2 جوابهای ما لانهایة له حاصل میشود ولیکن نمیتوانیم این جوابها را در تساوی (1) بگذاریم زیرا که x^2 از انحالسقاط شده است پس باین قسم عمل میکنیم که $y = \left(\frac{20 - A^2}{2A}\right)^2$

بعد از وضع او در تساوی (1) این تساوی حاصل است

$$x^2 - 10 = \left(\frac{20 - A^2}{2A}\right)^2$$

پس $x^2 = \frac{(20-12)^2}{4A^2} + 10 = \frac{400+A^2}{4A^2}$

در این تساوی چون x باید مقدار حقیقی باشد و $4A^2$

که مخرج است مجذور حقیقی است پس صورت کسر نیز باید

یک مجذور حقیقی باشد و فرض میکنیم او را مساوی q^2

پس این تساوی حاصل است $A^2 + 400 = q^2$

$A^2 = q^2 - 400$

و

حال فرض میکنیم $A^2 = R$

$A^2 = R^2$

پس

و $R^2 = q^2 - 400$

$R = \sqrt{q^2 - 400}$

q در اینجا مقداریست نامعین ولیکن باید مقادیری فرض شود

که بعد از تقریق ۱۲ از او یکمجذور صحیحی حاصل شود و بعد از آنکه

آن مقادیر را معین نمودیم آن ریشها مساوی R میشود پس باید

نیز در آن مقادیر جستجو نمود از مقادیری که مجذور صحیح باشند زیرا که

R مساوی A^2 فرض شده بود پس بعد از آنکه آن مقادیر را یافتیم مجذور

او مساوی است با A و باید دانست که نمیتوانیم بجهت q مقداری فرض

نمائیم که مجذور او کوچکتر از ۴۰۰ باشد زیرا که اگر کوچکتر باشد

مانند

مانده منفی خواهد بود و عدد منفی جذر ندارد بوجه دیگر

بعد از انکه در تساوی اول یعنی $x^2 - 10 = y^2$

بتنهائی عمل کنیم بجهت x و y این مقادیر حاصل میشود

$$x = \frac{10 + A^2}{2A}$$

$$y = \frac{10 - A^2}{2A}$$

و بعد از ان که در تساوی دویم یعنی $x^2 + 10 = z^2$

بتنهائی عمل کنیم بجهت x و z این مقادیر حاصل میشود

$$x = \frac{10 - A^2}{2A}$$

$$z = \frac{10 + A^2}{2A}$$

حال جستجو میکنیم در دو سلسله مقادیر x از دو تساوی

دو مقداری که با هم متساوی باشند پس ان مقدار x حقیقی است

زیرا که در تساوی اول اگر از مجذور داوده اسقاط کنیم باقی

یکمجذور حقیقی است و اگر در تساوی دویم ده بر آن اضافه

کنیم حاصل نیز یکمجذور حقیقی است بوجه دیگر

$$x^2 - 10 = y^2$$

$$x^2 + 10 = z^2$$

بعد از جمع نمودن دو تساوی این تساوی حاصل است $2x^2 = y^2 + z^2$

و بعد از این در مسئله پنجم از این نشاوی گفتگو خواهیم نمود
و باید دانست که مجذور مطلوب یعنی x^2 یافت نمیشود
در اعداد صحاح زیرا که تفاضل مجذورات در اعداد متوالیه
۳ ۵ ۷ ۹ . ۱۱ . . .
و در اعداد زوج این است ۱۲ ۲۰ ۲۸ ۳۶ ۴۴
و در اعداد فرد این است ۱ ۸ ۱۶ ۲۴ ۳۲ ۴۰
و در اعدادیکه تفاضل ان دو است این است ۱ ۳ ۵
و در اعدادیکه تفاضل ان سه است این است ۳ ۶ ۹
پس یافت نمیشود دو مجذوری که تفاضل انها ده باشد و نیز
یافت نمیشود این مجذور در اعداد کسور زیرا که هر کسری را
که از او ده عدد نقصان کنیم باقی مانده عدد منفی است و عدد
منفی جذر ندارد پس در صورتی که یکشرط در اعداد کسور
یا صحاح صدق نکند جمع بین الشرطین بطریق اولی صدق نخواهد
کرد **المسئلة الثالثة** اقر لزید بعشرة الا جذر مال العمرو
ولعمرو بخمسة الا جذر مال زید **جواب** فرض میکنیم مال
زید را x^2 و مال عمرو را y^2 پس از فرض مسئله داخل
میشود بجهة زید $y^2 - 10$ و بجهة عمرو $x^2 - 5$ پس

دو تساوی حاصل است $\left.\begin{array}{l} x^2 = 10 - y \\ y^2 = 5 - x \end{array}\right\}$

از تساوی اخیر

$x = 5 - y^2$

و

$x^2 = y^4 - 10y^2 + 25$

بعد از گذاشتن مساوی x^2 را در تساوی اول

$10 - y = y^4 - 10y^2 + 25$

$y^4 - 10y^2 + y + 15 = 0$

بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهت y^2 این

$y^2 = 2.0743229$

و بجهت x^2 این

$x^2 = 1.559725$

و حبه دوم فرض میکنیم مال عمرو را y پس مال زید

$10 - y$

میشود

و مال عمرو میگردد

$5 - \sqrt{10 - y}$

پس این تساوی حاصل است

$y^2 = 5 - \sqrt{10 - y}$

$5 - y^2 = \sqrt{10 - y}$

$y^4 - 10y^2 + 25 = 10 - y$

$y^4 - 10y^2 + y + 15 = 0$

$y^2 = 2.0743229$

وجه سیم فرض میکنیم مال زید را x^2 پس مال

عمرو میشود $5 - x$

و مال زید میشود $10 - \sqrt{5 - x}$

پس این تساوی حاصل میشود $x^2 = 10 - \sqrt{5 - x}$

$x^2 - 10 = -\sqrt{5 - x}$

$x^4 - 20x^2 + 100 = 5 - x$

$x^4 - 20x^2 + x + 95 = 0$

بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهة x

$x = 2,9257$

پس مال زید این میشود $x^2 = 8,55975$

وجه چهارم فرض میکنیم مال زید را x پس مال

عمرو میشود $5 - \sqrt{x}$

و مال زید میشود $100 \sqrt{5 - \sqrt{x}}$

پس این تساوی حاصل $x = 10 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}$

$x - 10 = -\sqrt{5 - \sqrt{x}}$

$x^2 - 20x + 100 = 5 - \sqrt{x}$

$x^4 - 40x^3 + 590x^2 - 2100x + 9025 = 0$

$$x^4 - 20x^3 + 590x^2 - 3101x + 1025 = 0$$

$$x = 8.5175$$

اگرچه بچند وجه دیگر این مسئله را حل نموده ام لیکن در اینجا
بهمین چهار وجه اکتفا نمودیم **المسئلة الرابعة**
عشرة مقسومة بقسمین اذا قسمنا کلا منهما علی الآخر مجتمعا
کان المجتمع مساویا لاحد قسمی العشرة جواب فرض میکنیم یکی
از دو قسمت عشره را x پس قسمت دیگر $10-x$ میشود
از اینجا این تساوی حاصل است $\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x} = x$

$$x^4 + x^2 - 20x + 100 = 10x^2 - x^3$$

پس

$$x^4 - 8x^2 - 20x + 100 = 0$$

و بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود مجهول x

این دو جواب

$$x = 2.8786$$

$$x = 8.9873$$

پس مجهول قسمت دیگر عشره این دو جواب حاصل است

$$10 - x = 7.1214$$

$$10 - x = 1.0127$$

یعنی این مسئله دو حالت دارد یکی انکه تقسیم کنیم عشره را بدو

قسمت بطوری که بعد از عمل حاصل مساوی قسمت اصغر شود ۲٫۱۲۱۷

و او این دو قسمت است ۲٫۸۱۱۳

و دیگری آنکه حاصل مساوی قسمت اعظم شود و او این دو قسمت

است **وجه ثانی** فرض میکنیم یکی از دو قسمت عشر را

x و دیگری را y پس این تساوی حاصل است

$$x + y = 10 \quad (1)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x$$

$$x^2 + y^2 = xy \quad (2)$$

$$x = 10 - y$$

$$y^4 - 20y^2 + 100 = x^2$$

و از تساوی اول

$$y^2 - 20y + 100 + y^2 = y^2 - 20y^2 + 100y$$

$$y^3 - 22y^2 + 120y - 100 = 0$$

$$y = 2,1217$$

$$y_1 = 1,0127$$

وجه ثالث با آنکه از تساوی اول $y = 10 - x$

$$y^2 = x^2 - 20x + 100$$

و

بعد از وضع او در تساوی دوم $2x^2 - 20x + 100 = 10x^2 - x^3$

$$x^3 - 11x^2 - 20x + 100 = 0$$

$x_1 = 7.8\sqrt{3}$

$x_2 = -1.98\sqrt{3}$

وجه رابع فرض میکنیم یکی از دو قسمت را x پس قسمت دیگر $10-x$ است و پس از آن این تساوی حاصل است

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 10-x$$

$$x^4 + x^2 - 20x + 100 = x^2 - 20x^2 + 100x$$

$$x^4 - 22x^2 + 120x - 100 = 0$$

$$x = 7.1217$$

$$x_1 = 1.0127$$

وجه خامس

$$x + y = 10$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y$$

$$x^2 + y^2 = xy^2$$

$$x^2 + y^2 = 100 - 2xy$$

$$xy^2 = 100 - 2xy$$

حال هرگاه فرض کنیم $x = 10 - y$

پس $10y^2 - y^2 = 100 - 20y + 2y^2$

و $y^3 - 8y^2 - 20y + 100 = 0$

$y = 2,8783$

$y_1 = 8,9873$

$y = 10 - x$ وجه سادس واگر فرض کنیم

$y^2 = x^2 - 20x + 100$

$x^3 - 20x^2 + 100x = 100 - 20x + 2x^2$

$x^3 - 22x^2 + 120x - 100 = 0$

$x = 7,1210$

$x_1 = 1,0127$

اگرچه وجوه بسیار است واین بهمین قدر اکتفا نمودیم

المسئلة الخامسة مجذور اذا زید علیه جذره ودرهمان او نقص منه جذره ودرهمان کان المجتمع او الباقی جذرا

جواب این عبارت نیز دو احتمال دارد احتمال اول که ظاهر از عبارت خلاصه است آنکه شرط یکی از زیاده ونقصان باشد بعنوان بدلیت یعنی یکی از زیاده یا نقصان کفایت کند در تحقق مسئله که در حقیقت این مسئله راجع بدو مسئله شده است هکذا مجذور اذا زید علیه جذره ودرهمان کان المجتمع جذرا ومجذور اذا نقص منه جذره ودرهمان کان الباقی جذرا اما بنا بر فرض اول

از

از احتمال اوّل فرض میکنیم ان مجذور را x^2

پس این تساوی حاصل است $y^2 = 2 + x + x^2$

و فرض میکنیم $y - x = A$

و $y = A + x$

و $y^2 = A^2 + x^2 + 2Ax$.

بعد از گذاشتن مساوی y^2 را در تساوی اوّل

$$x + 2 = A^2 + 2Ax.$$

$$(2A - 1)x = 2 - A^2$$

$$x = \frac{2 - A^2}{2A - 1}$$

$$y = \frac{2 + A^2 - A}{2A - 1}$$

A در این دو فرمول کلّی مقداریست نامعیّن پس حاصل میشود بجهة x و y این مقادیر

$A = \ldots\ldots 0, \frac{2}{3}, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots -2, \frac{4}{9}, 1, -\frac{2}{7}, -\frac{14}{25}, -2, \ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots -2, \quad 2, 1\frac{1}{3}, 1\frac{3}{5}, 2, \ldots\ldots$

امّا بنا بر فرض ثانی از احتمال اوّل فرض میکنیم ان مجذور را x^2 این تساوی حاصل است $z^2 = 2 - x - x^2$

فرض میکنیم $y - x = 1$

و $y = 1 - x$

و $y^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times x$

بعد از گذاشتن مساوی y^2 را در تساوی اول

$$-x - 2 = 1^2 - 2 \times 1 \times x$$

$$(2 \times 1 - 1)x = 1^2 + 2$$

$$x = \frac{1^2 + 2}{2 \times 1 - 1}$$

$$y = \frac{2 \times 1^2 - 1 + 2}{2 \times 1 - 1}$$

۱ هر قدر را اینجا مقدار نامعین است پس حاصل میشود بجهة

x و y این مقادیر

$1 = \ldots, 0, 1, 2, 3, 3, \ldots$

$x = \ldots, 1, -2, 3, 2, 2\frac{1}{5}, 2\frac{4}{7}, \ldots$

$y = \ldots, -2, 3, 4, 5\frac{1}{5}, 6\frac{4}{7}, \ldots$

و هرگاه بخواهیم این دو فرض و سایر فرضهای دیگر را بیک

لفظ ادا کنیم باین قسم عمل میکنیم $x^2 \pm x \pm a = y$.

$$x \mp y \mp x = 1$$

$$x \pm y = 1 \pm x$$

$$\pm y^2 = A^2 + x^2 \pm 2Ax.$$

$$\pm x \pm a = A^2 \pm 2Ax.$$

$$(\pm A \mp 1)x = \pm a - A^2$$

$$x = \frac{\pm a - A^2}{\pm 2A \mp 1}$$

واگر فرض کنیم که بایستی جذر مطلوب جذر را افزود و a را انقصان نمود یا جذر را انقصان نمود و a را اضافه کرد باید قسم عمل میکنیم

$$x^2 \pm 2ax \mp a = y^2$$

$$y = x = A$$

$$\pm y = A \pm x$$

$$y^2 = A^2 \pm x^2 \pm 2Ax$$

$$\pm 2ax \mp a = A^2 \pm 2Ax$$

$$(\pm 2A \mp 1)x = \mp a - A^2$$

$$x = \frac{\mp a - A^2}{\pm 2A \mp 1}$$

واحتمال ثانی که ضعیف است انکه هر یک از زیاده و نقصان مدخلیت در تحقق مسئله داشته باشد پس ما بفرض مسئله این دو تساوی حاصل است $y^2 = x^2 \pm 2ax$

$x^2 - x - 2 = y^2$

اولاً میتوانیم باین قاعده حل مسئله را نمائیم که در تساوی

اول بتنهائی عمل کنیم تا این دو فرمول حاصل شود

$$x = \frac{2 - t^2}{2t - 1}$$

$$y = \frac{2t - t^2 - t}{2t - 1}$$

و بعد از آن در تساوی دوم بتنهائی عمل کنیم تا این دو فرمول

$$x = \frac{2 + t^2}{2t - 1} \qquad y = \frac{2t^2 - t + 2}{2t - 1}$$

نیز حاصل شود

چون t در این دو فرمول x مقداری است نامعین پس

حاصل میشود بجهة x دو سلسله مقادیر ما لانهایه حال

جستجو میکنیم در این دو سلسله مقادیر مقداری را که مشترک

باشد در هر دو سلسله که او مقدار x است بجهة آنکه صدق

میکند در تساوی اول از بابت اینکه از فرمول اول است و صدق

میکند در تساوی دوم از بابت اینکه از فرمول دوم است

و بعد ثانی اعاده میکنیم دو تساوی اول را

$$x^2 + x + 2 = y^2 \qquad (1)$$

$$x^2 - x - 2 = y^2 \qquad (2)$$

بعد از جمع نمودن دو تساوی این تساوی حاصل است

$$x^2 = \zeta^2 + y^2 \qquad (۲)$$

فرض میکنیم $x - \zeta = A$

و $x = A + \zeta$

و $x^2 = A^2 + \zeta^2 + 2A\zeta$

$$2x^2 = 2A^2 + 2\zeta^2 + 4A\zeta$$

بعد از گذاشتن مساوی $2x^2$ را در تساوی بیستم

$$2A^2 + \zeta^2 + 4A\zeta = y^2$$

$$\zeta^2 + 4A\zeta = y^2 - 2A^2$$

$$\zeta = -2A \pm \sqrt{y^2 + 2A^2}$$

حال چونکه ζ باید مقدار حقیقی باشد پس مقدار زیر رادیکال باید یکجذر حقیقی باشد فرض میکنیم $y^2 + 2A^2 = k^2$

خلاصه بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود جهة A و y و k این سه فرمول کلی $A = 2pq$

$$k = p^2 + 2q^2$$

$$y = p^2 - 2q^2$$

در این سه فرمول مقادیر نامعین هستند پس اصل مطلب

جهة ζ $\zeta = -2A - k = p^2 + 2q^2 - 4pq$

و بهر نه این $x = p^2 + 2q^2 - 2pq$

پس $x = p^2 + 2q^2 - 2pq$

$y = p^2 - 2q^2$

$z = p^2 + 2q^2 - 2pq$

حال حاصل میشود بجهت x و y و z جوابها الی غیر نهایه ولیکن

جمیع این جوابها صدق نمیکند در تساویهای اول و دویم پس باید جستجو

نمود میان مقادیر x مقداری را که هرگاه بگذاریم در تساوی

(۱) یا در تساوی دویم صدق نماید پس مجذور آن مقدار مجذوری

مطلوبست و باید دانست که این مجذوری یافت نمیشود در اعداد صحاح

زیرا که در قواعد مجذورات مبین شده است که چون جذر هر مجذوری را

مضاعف نمایند و واحدی بر آن علاوه نموده مجموع را بر آن مجذوری

اضافه کنند مجذور تالی آن حاصل میشود مثلا ۲۵ مجذور ۵ است و جذر

آن ۵ و مضاعف آن ۱۰ چون واحد اضافه آن نمایند ۱۱ میشود و

چون ۱۱ را اضافه ۲۵ نمایند ۳۶ میشود که مقدار تالی ۶ است

و این قاعده مطرد است در اعداد صحاح و معلوم است که ضعف جذر

بعلاوه واحد همیشه بزرگتر است از جذر بعلاوه دو و در غیر مجذور

واحد کما لا یخفی پس اگر آن عدد صحیح باشد لازم میآید که تا بین دو مجذوری

متوالی مجذور واسطه یافت شود هذا خلف چون عدم تحقق
یک شرط از شروط لازم دارد عدم تحقق مشروط را مطلقا از
این جهت حاجت گفتگو در تحقق شرط ثانی یا عدم تحقق آن نیست
وهم چنین یافت نمیشود در اعداد کسور زیرا که کلیه جذور کسور
همیشه بزرگتر است از مجذورش پس اگر جذر فقط را اسقاط کنیم
از مجذورش باقی مانده عدد منفی میشود و عدد منفی جذر ندارد
وچون مسئله ثانیه نیز منتهی شده بود باین تساوی $2xy^2 = y^4 + x^2$
پس بعد از عمل نمودن در این تساوی این فرمولات حاصل
میشود

$$x = p^2 + 2q^2 - 2pq$$
$$y = p^2 - 2q^2$$
$$z = p^2 + 2q^2 - 2pq$$

ولیکن جمیع این مقادیر نیز در تساویهای اول صدق نمیکند پس
باید جستجو نمود در میان مقادیر x مقداری را که در این تساوی
$x^2 + 10 = y^2$ یا در این تساوی $x^2 - 10 = z^2$
صدق نماید پس بعد از یافتن آن مقدار x مطلوب است و اگر
مقصود سائل از مسئله این باشد که بعد از تحویل تساوی این
تساویها حاصل شود (1) $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + x - 2 = y^2 \\ x^2 - x + 2 = z^2 \end{array} \right.$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = y^2 \\ x^2 + x + 2 = z^2 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = y^2 \\ x^2 - x - 2 = z^2 \end{array}\right\} \quad (3)$$

میتوانیم جمیع این تساویها را حل نمائیم بقاعده که اول مذکور شد

المسئلة السادسة ثلاثة مربعات متناسبة مجموعها مربع

جواب چون در این مسئله بیان نموده که این مربعات بچه نسبت حاصل باشند پس میتواند نسبت عددی قصد کرده باشد و میتواند نسبت هندسی اولا فرض میکنیم که نسبت عددی قصد کرده باشد پس این تساویها حاصل است

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2$$

$$x^2 : y^2 : y^2 : z^2$$

از تساوی دویم

$$x^2 = 2y^2 - z^2$$

بعد از گذاشتن مساوی x^2 را در تساوی اول حاصل میشود

$$3y^2 = v^2 \quad \text{بعد از گرفتن جذر} \quad \sqrt{3}\,y^2 = v$$

پس

$$\sqrt{3} \cdot y = v$$

در این تساوی اخری میتوانیم y را هر مقداری که بخواهیم فرض نمائیم پس اگر ضرب کنیم او را در جذر سه حاصل مساوی v میشود بمقدار

یوتر

تقریبی و چون z باید مقدار حقیقی باشد پس این مسئله مستحیل است
و یافت نمیشود سه مجذور متناسب بتناسب عددی که مجموع آنها
مجذور باشد و ثانیاً فرض میکنیم که نسبت هندسی قصد کرده باشد
پس حاصل میشود این دو تساوی $x^2+y^2+z^2=v^2$ (1)

$x^2 : y^2 :: y^2 : z^2$ (2)

و

$x : y :: y : z$

$y^2 = xz$

بعد از گذاشتن مقدار y^2 را در تساوی اول حاصل میشود

$x^2 + xz + z^2 = v^2$

خلاصه بعد از عمل کردن حاصل میشود بجهة x و z و v
این فرمولات $x = 2pq + q^2$

$z = p^2 - q^2$

$v = p^2 + pq + q^2$

p و q در این فرمولات هستند مقادیر نامعین پس حاصل
میشود بجهة x و z و v از مقادیر نامعین ولیکن جمیع
این مقادیر صدق نمیکند در تساویهای اول زیرا که حاصل ضرب
xz در همه صور مجذور صحیح نمیشود و فرض نموده بودیم او را

مساوی z^2 یعنی $y^2 = z^2$ پس باید y و z را مقداری فرض نمائیم
که چون x و z معلوم شدند حاصل ضربشان یکجذر صحیحی
باشد پس آنمقدار حقیقی است و z و y و x از آن قرار معین
میشوند **المسئلة الثانیة** مکعب قسم بقسمین مکعبین **جواب**

بنابر فرض صدق مسئله این تساوی حاصل است

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad (1)$$

فرض میکنیم $z - x - y = 1$ و $z = 1 + x + y$

$$z^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 x + 3 \cdot 1^2 y + 3 \cdot 1 x^2 + 6 \cdot 1 xy + 3 \cdot 1 y^2 + 3 x^2 y + 3 x y^2 + y^3$$

$$z^3 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y^3$$

$$0 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 x + 3 \cdot 1^2 y + 3 \cdot 1 x^2 + 6 \cdot 1 xy + 3 \cdot 1 y^2 + 3 x^2 y + 3 x y^2 \qquad (2)$$

$$(3 \cdot 1 + 3y) x^2 + (3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 y + 3 y^2) x + (1^3 + 3 \cdot 1^2 y + 3 \cdot 1 y^2) = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 y + 3 y^2}{3 \cdot 1 + 3y}\right) x + \left(\frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 y + 3 \cdot 1 y^2}{3 \cdot 1 + 3y}\right) = 0$$

$$(3) \quad x = -\underbrace{\left(\frac{3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 y + 3 y^2}{2(3 \cdot 1 + 3y)}\right)}_{a} \pm \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 y + 3 y^2}{6 \cdot 1 + 6y}\right)^2 - \frac{3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 y + 3 y^2}{6 \cdot 1 + 6y}} = -a \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{9 \cdot 1^4 + 36 \cdot 1^3 y + 54 \cdot 1^2 y^2 + 36 \cdot 1 y^3 + 9 y^4 - (12 \cdot 1^4 + 48 \cdot 1^3 y + 72 \cdot 1^2 y^2 + 36 \cdot 1 y^3)}{(6 \cdot 1 + 6y)^2}} =$$

$$\frac{-(3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 y + 3 y^2) \pm \sqrt{9 y^4 - 18 \cdot 1^2 y^2 - 12 \cdot 1^3 y - 3 \cdot 1^4}}{6 \cdot 1 + 6y}$$

حال چون x باید مقدار حقیقی باشد پس باید مقدار زیر رادیکال
یک جذر حقیقی باشد پس فرض میکنیم او را مساوی z^2 پس

این تساوی حاصل است $y^4 - 18\lambda^2 y^2 - 12\lambda^3 y - 3\lambda^4 = q^2$

حال فرض میکنیم $m^2 = 1$, $-18\lambda^2 = C$

$E = (-3\lambda^4)$, $D = (-12\lambda^3)$

پس تحویل میشود تساوی (۴) باین تساوی

$$m^2 y^4 + C y^2 + D y + E = q^2 \qquad (۵)$$

خلاصه بعد از عمل نمودن در این تساوی این فرمول کلی حاصل آید

$$y = \frac{C^2 - 4Em^2}{4Dm^2} \qquad (۶)$$

حال هرگاه λ را واحد فرض نمائیم و مساویهای m^2 و C و D و E را در آن فرمول بگذاریم حاصل میشود مجهول y منهای واحد یعنی $y = -1$ و هرگاه فرض نمائیم $\lambda = 2$ حاصل میشود $y = -2$ و هرگاه فرض نمائیم $\lambda = 3$ حاصل میشود $y = -3$ و همچنین هرگاه فرض نمائیم $\lambda = -1$ حاصل میشود $y = 1$ و هرگاه فرض نمائیم $\lambda = -2$ حاصل میشود $y = 2$ و اگر فرض نمائیم $\lambda = -3$ حاصل میشود $y = 3$ و همچنین اگر فرض نمائیم $\lambda = 0$ حاصل میشود $y = 0$ و چون این مقادیر y را بگذاریم در تساوی (۴) حاصل میشود در جمیع حالات

بجهة y صفر یعنی $y=0$ و هرگاه مقادیر A و y و y
را بگذاریم در تساوی (۳) حاصل میشود در جمیع حالات بجهة
x صفر یعنی $x=0$ و هرگاه در تساوی (۲) بجهة کوزینیان
های x و y فاکتر بگیریم یعنی y را مجهول فرض نمائیم پس بعد
از عمل کردن حاصل میشود $y^2(3x^2-12x+11)-x^2y$
و کوئی فیسیانهای x در این تساوی بعینه همان کوئی فیسیانهای
y است در تساوی (۲) پس در این تساوی A را هر مقدار
فرض نمائیم حاصل میشود نیز بجهة y و y صفر پس معلوم شد که
این مسئله مستحیل است زیرا که اگر جواب عددی داشت حاصل می شد که
یکی از این فروض بجهة y و x یکمقدار عددی
ولیکن اگر فرض کنیم که یکمسئله منتهی شده است با این تساوی
$y^4+3y^2-5y+6=y^2$
و بخواهیم که مقادیر y و y را معین نمائیم کوئی فیسیانهای
این تساوی را بگذاریم در فرمول (۶) حاصل میشود بجهة
y . $\frac{3}{2}$ یعنی $y=\frac{3}{2}$ و $y=\frac{33}{2}$
و هم چنین هرگاه فرض نمائیم در یکمسئله $y=-2$ و بعد از آنکه
عمل نمائیم در آن تساوی حاصل میشود از آنجمله $13-y-5y^2-y^3-y^4$

واز خارج میدانیم که y در اینجا مساوی است بنهای دو و
حاصل جمع این جمله مساویست به ۴۹ ولیکن میخواهیم بدانیم
که اگر بواسطه این فرمول عمل کنیم بجهة y و حاصل جمع چه مقدار
حاصل میشود پس فرض میکنیم او را مساوی q^2 پس حاصل میشود
این تساوی $4y^4 - 3y^3 - 5y - 12 = q^2$ و بعد از وضع کردن
قیمتهارا در فرمول (۶) حاصل میشود بجهة y این مقدار
$y = -\frac{217}{10}$ یعنی $-\frac{217}{10}$
و $q = \frac{19378}{9450}$
پس معلوم شد که این فرمول کلی است و هر تساوی که باین صورت
نوشته شود $m^2y^4 + Cy^2 + Dy + E = q^2$
بواسطه این فرمول حل میشود پس واضح شد که مسئله مفروضه
غلط فرض شده است که بواسطه این فرمول جوابی حاصل نشد
والا باید اقلا یک جواب از او حاصل شود و باینجا ختم نمودیم
گفتگو را در مسائل سبعه
والحال ذکر میکنیم یک تساوی مشکلی را که به بیست و دو وجه آنرا
حل نموده ام و در ضمن آن بیان میشود یک قاعده عمومی تحویل
نمودن هر تساوی مخلوطی را که از درجات اعلی باشد بدرجه

دوم بلکه بدرجهٔ اول و نیز اکثر قواعد جبریه در این ضمن
استعمال میشود و بسیار مفید است از برای متعلمین

وجوهی که منتهی میشود بدرجهٔ دوم

اول

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12 \\ xy^2 + xy^3 = 18 \end{cases}$$

$$xy + xy^3 = 18y$$

$$xy + xy^2 = 12$$

$$xy^3 - xy^2 = 18y - 12$$

$$x(y^3 - y^2) = 18y - 12$$

$$x(y^2 + y)(y^2 - y) = 18y - 12$$

$$x(y^2 + y) = 12$$

$$12(y^2 - y) = 18y - 12$$

$$12y^2 - 12y = 18y - 12$$

$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2, \frac{1}{2}$$

$$2x + 4x = 12 \qquad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 12$$

$9x = 12$ یا $\frac{3}{4}x = 12$

$x = 4$ یا $x = 16$

وجد دوّم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12 \\ x + xy^2 = 18 \end{cases}$$

$$xy + xy^2 = 18y$$

$$xy + xy^2 = 12$$

$$xy^2 - xy^2 = 18y - 12$$

$$xy^2(y^2 - 1) = 18y - 12$$

$$xy^2(y+1)(y-1) = 18y - 12$$

$$xy(y+1) = 12$$

$$\frac{xy^2(y+1)(y-1)}{xy(y+1)} = \frac{18y - 12}{12} = \frac{3y-2}{2}$$

$$y(y-1) = \frac{3y-2}{2}$$

$$2y^2 - 2y = 3y - 2$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2, \frac{1}{2}$$

$$12y + 4x = 12$$

$9x = 18 \quad , \quad x = 2 , 19.$

وجه سوم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12. \\ x + xy^3 = 18. \end{cases}$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3}{x - xy - xy^2 + xy^3} = \frac{25}{9} = 5.$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3}{1 - y - y^2 + y^3} = 5$$

$$\frac{(y^2+1)(y+1)}{(y^2-1)(y-1)} = 5.$$

$$\frac{(y^2+1)(y+1)}{(y+1)(y-1)(y-1)} = 5.$$

$$\frac{y^2+1}{(y-1)(y-1)} = 5$$

$$y^2+1 = 5(y^2-2y+1)$$

$$y^2+1 = 5y^2-10y+5$$

$$4y^2-10y+4 = 0$$

$$y^2-\frac{5}{2}y+1 = 0$$

$$y = 2 , \frac{1}{2}.$$

$$x = 2 , 19$$

وجہ چہارم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12 \\ x + xy^3 = 18 \end{cases}$$

$$xy + xy^2 = 12y$$

$$xy + xy^2 = 12$$

$$xy^2 - xy^2 = 18y - 12$$

$$xy^2(y^2 - 1) = 18y - 12$$

$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 9$$

$$x(y^2 - 1)(y - 1) = 9$$

$$\frac{xy^2(y^2-1)}{x(y^2-1)(y-1)} = \frac{18y-12}{9}$$

$$\frac{y^2}{y-1} = 2y - 2$$

$$y^2 = 2y^2 - 2y + 2$$

$$2y^2 - 2y + 2 = 0$$

$$y^2 - \frac{2}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 \quad \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \quad 19$$

وجہ پنجم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12 \\ x + xy^3 = 18 \end{cases}$$

$$xy^3 + xy^4 = 12y^2$$
$$xy^3 + x6 = 18$$

$$xy^2 - x6 = 12y^2 - 18$$
$$x(y^2 - 1) = 12y^2 - 18$$

$$x(y^2+1)(y+1)(y-1) = 12y^2 - 18$$
$$x(y+1) = \frac{12}{y}$$
$$\frac{12}{y}(y^2+1)(y-1) = 12y^2 - 18$$
$$12y^3 - 12y^2 + 12y - 12 = 12y^2 - 18y$$
$$-12y^2 + 12y - 12 = -18y$$
$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$
$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$
$$y = 2, \ \frac{1}{2}$$
$$x \times 3 = \frac{12}{2}$$
$$3x = 6$$
$$x = 2, \ 18$$

وجه ششم

$$x^2y + x^2y^2 = 12$$
$$x^3 + x^3y^3 = 18$$

$$xy^2 + xy^3 = 18y^2$$
$$xy^2 + xy = 12.$$

$$xy^3 - xy = 18y^2 - 12.$$
$$xy(y^2 - 1) = 18y^2 - 12.$$
$$xy(y^2+1)(y^2-1) = 18y^2 - 12$$
$$xy(y^2+1)(y+1)(y-1) = 18y^2 - 12.$$
$$xy(y+1) = 12.$$

$$12(y^2+1)(y-1) = 18y^2 - 12.$$
$$12y^3 - 12y^2 + 12y = 18y^2$$
$$12y^3 - 30y^2 + 12y = 0$$
$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$
$$y^2 + \frac{5}{2}y + 1 = 0$$
$$y = 2, \frac{1}{2}$$
$$x = 2, 18$$

وجه هفتم

$$\left.\begin{aligned} xy + xy^2 &= 12 \\ x + xy^3 &= 18. \end{aligned}\right\}$$

$$xy + xy^2 = 12y^2$$
$$x + xy^3 = 18.$$

$$xy^2 - x = 12y - 18$$

$$xy^2 - 12y - x = -18$$

$$xy^2 + xy = 12$$

$$12y + xy + x = 30$$

$$xy^2 + 12y^2 + xy = 30y$$

$$xy^2 + xy = 12$$

$$12y^2 = 30y - 12$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y - \frac{5}{4} = \pm\frac{3}{4}$$

$$y = 2 \ , \ \frac{1}{2}$$

$$x + 4x = 18 \qquad x + \frac{1}{4}x = 18$$

$$5x = 18 \qquad \frac{5}{4}x = 18$$

$$x = 2 \qquad x = 14$$

وجد هشتم

$$xy + xy^2 = 12$$

$$x + xy^2 = 18$$

$$xy^2 + xy^3 = 12y$$

$$x + xy^3 = 18$$

$$xy^2 - x = 12y - 18.$$

$$xy^2 - 12y - x = -18.$$

$$xy^2 + xy = 12.$$

$$12y + xy + x = 30 \quad \ldots\ldots\ldots \quad *$$

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 30$$

$$(x + xy)(1 + y^2) = 30$$

$$x + xy = \frac{30}{1 + y^2}$$

$$x + xy = 30 - 12y \quad \ldots\ldots\ldots \quad *$$

$$\frac{30}{1 + y^2} = 30 - 12y.$$

$$30 = 30 - 12y + 30y^2 - 12y^3$$

$$12y^3 - 30y^2 + 12y = 0.$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0 \qquad y = 2 \text{ و } \frac{1}{2}$$

وجد نفسه

$$xy + xy^2 = 12.$$

$$x + xy^3 = 18.$$

$$xy + xy^3 = 12y.$$

$$x + xy^3 = 18.$$

$$xy^2 - x = 12y - 18.$$

$$x(y^2-1) = 12y-18.$$

$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 30.$$

$$x(y^2-1)(y-1) = 9.$$

$$(12y-18)(y-1) = 9.$$

$$12y^2 - 30y + 18 = 9.$$

$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y - \frac{5}{4} = \pm\frac{3}{4}.$$

$$y = 2 \,.\,.\, \frac{1}{2}.$$

$$x + 8x = 18. \qquad x + \frac{1}{8}x = 18.$$

$$x = 2 \qquad x = 16.$$

وجوهی که منتهی میشود بدو جمله سیم و جمله اول

$$xy + xy^2 = 12$$

$$x + xy^3 = 18. \quad \ldots\ldots *$$

$$xy + xy^4 = 18y.$$

$$xy + xy^2 = 12.$$

$$x(y^3 - y^2) = 12 - 18y.$$

$$x = \frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} \quad *$$

$$x = -\frac{12}{y^2 + y}.$$

$$\frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} = -\frac{12}{y^2 + y}$$

$$12y - 18y^2 + 12y^2 - 18y^3 = 12y^2 - 12y^4$$

$$12y^4 - 18y^3 - 18y^2 + 12y = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$y^3 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}y + 1 = 0$$

وجه ثانی

$$x = \frac{18}{1 + y^3} \quad \ldots *$$

$$x = \frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} \quad \ldots *$$

$$\frac{12 - 18y}{y^2 - y^4} = \frac{18}{1 + y^3}.$$

$$12 - 18y + 12y^3 - 18y^4 = 18y^2 - 18y^4$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه ثالث

$$xy + xy^2 = 12.$$

$$x + xy^3 = 18:$$

$$xy + xy^2 + \frac{xy + xy^2}{2} = x + xy^3$$

وجه رابع

وجه رابع

$$3xy + 3xy^2 = 2x + 2xy^3.$$

$$3y + 3y^2 = 2 + 2y^3$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$xy + xy^2 = 12.$$

$$x + xy^2 = 18.$$

$$\frac{xy + xy^2}{x + xy^2} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{y + y^2}{1 + y^2} = \frac{2}{3}.$$

$$3y + 3y^2 = 2 + 2y^3, \quad 2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه خامس

$$xy + xy^2 = 12.$$

$$x + xy^2 = 18.$$

$$x(y + y^2) = 12$$

$$x = \frac{12}{y + y^2}.$$

$$x(1 + y^2) = 18.$$

$$x = \frac{18}{1 + y^2}.$$

$$\frac{12}{y + y^2} = \frac{18}{1 + y^2}.$$

$$12 + 12y^2 = 18y + 18y^2$$

$$12y^2 - 18y^2 - 18y + 12 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه سادس

$$xy + xy^{2} = 12$$
$$x + xy^{3} = 18.$$

$$x - xy - xy^{2} + xy^{3} = 9.$$
$$\frac{xy + xy^{2}}{2} = 9.$$
$$2x + 2xy^{3} - 2xy - 2xy^{2} = xy + xy^{2}$$
$$2 + 2y^{3} - 2y - 2y^{2} = y + y^{2}$$
$$2y^{3} - 3y^{2} - 3y + 2 = 0$$

وجه سابع

$$xy + xy^{2} = 12$$
$$x + xy^{3} = 18.$$

$$x + xy + xy^{2} + xy^{3} = 30$$
$$x(1 + y + y^{2} + y^{3}) = 30$$
$$x(y^{2} + y) = 12.$$
$$x = \frac{12}{y^{2} + y}.$$
$$12 + 12y + 12y^{2} + 12y^{3} = 30y + 30y^{2}$$
$$2 + 2y + 2y^{2} + 2y^{3} = 5y + 5y^{2}$$
$$2y^{3} - 3y^{2} - 3y + 2 = 0$$

وجه ثامن

$$x = \frac{18}{1 + y^{3}}.$$

$$11 + 18y + 18y^2 + 18y^3 = 30 + 30y^3$$

$$12y^3 - 18y^2 - 18y + 12 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

تجنیس تابع

$$xy + xy^3 = 12$$
$$x + xy^3 = 18$$

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 30$$
$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 9$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3}{x - xy - xy^2 + xy^3} = \frac{30}{9} = 5$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3}{1 - y - y^2 + y^3} = 5$$

$$1 + y + y^2 + y^3 = 5 - 5y - 5y^2 - 5y^3$$

$$3y^3 - 9y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجوهی که منتهی میشود بدرجهٔ چهارم

وجه اول

$$xy + xy^3 = 12$$
$$x + xy^3 = 18$$

$$x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6 + x^2y^8 = 216$$

$$9x + 9xy^3 + 9xy + 9xy^2 = 216$$

$$x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6 + x^2y^8 = 9x + 9xy^3 + 9xy + 9xy^2$$

$$xy + xy^{۲} + xy^{۳} + xy^{۵} = ۹ + ۹y^{۳} + ۹y + ۹y^{۲}$$

$$x(y + y^{۲} + y^{۳} + y^{۵}) = ۹ + ۹y^{۳} + ۹y + ۹y^{۲}$$

$$x = \frac{۱۲}{y + y^{۲}}$$

$$۱۲y + ۱۲y^{۲} + ۱۲y^{۳} + ۱۲y^{۵} = ۹y + ۹y^{۴} + ۹y^{۲} +$$

$$+ ۹y^{۳} + ۹y^{۲} + ۹y^{۵} + ۹y^{۳} + ۹y^{۴}$$

$$۴ + ۴y + ۴y^{۳} + ۴y^{۴} = ۲ + ۲y^{۳} + ۳y + ۳y^{۲} +$$

$$+ ۲y + ۲y^{۴} + ۳y^{۲} + ۳y^{۳}$$

$$۲y^{۴} - y^{۳} - ۹y^{۲} - y + ۲ = ۰$$

وجه دوم

$$xy + xy^{۲} = ۱۲$$

$$x + xy^{۳} = ۱۸$$

$$x^{۲}y^{۲} + x^{۲}y^{۴} + ۲x^{۲}y^{۳} + \frac{x^{۲}y^{۲} + x^{۲}y^{۴} + ۲x^{۲}y^{۳}}{۲} =$$

$$= x^{۲}y + x^{۲}y^{۲} + x^{۲}y^{۴} + x^{۲}y^{۵}.$$

$$۳x^{۲}y^{۲} + ۳x^{۲}y^{۴} + ۶x^{۲}y^{۳} = ۲x^{۲}y + ۲x^{۲}y^{۲} + ۲x^{۲}y^{۴} + ۲x^{۲}y^{۵}$$

$$۳y^{۴} + ۳y^{۴} + ۶y^{۳} = ۲y + ۲y^{۲} + ۲y^{۴} + ۲y^{۵}.$$

$$۲y^{۵} - y^{۴} - ۶y^{۳} - y^{۲} + ۲y = ۰$$

$$۲y^{۴} - y^{۳} - ۹y^{۲} - y + ۲ = ۰$$

وجهی که منتهی میشود بمخلوطی از درجه پنجم

$$xy + xy^{۲} = ۱۲$$

$$x + xy^{۳} = ۱۸$$

$$\frac{x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5}{\sqrt{x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5}} = 119.$$

$$\frac{xy + xy^2}{2} = 9.$$

$$1\,x^2y + 1\,x^2y^2 + 1\,x^2y^4 + 1\,x^2y^5 = x^3y^3 + 3\,x^3y^4 + 3\,x^3y^5 + x^3y^6$$

$$1y + 1y^2 + 1y^4 + 1y^5 = xy^3 + 3xy^5 + 3xy^6 + xy^7$$

$$1 + 1y + 1y^3 + 1y^4 = xy^2 + 3xy^4 + 3xy^5 + xy^6$$

$$\text{Ei}\ y^2 + 3y^3 + 3y^4 + y^5 = 1 + 1y + 1y^3 + 1y^4$$

$$x = \frac{12}{y + y^2}.$$

$$12y^2 + 36y^3 + 36y^4 + 12y^5 = 1y + 1y^2 + 1y^4 + 1y^5 +$$

$$+ 1y^2 + 1y^3 + 1y^5 + 1y^6$$

$$3y + 9y^2 + 9y^3 + 3y^4 = 2 + 2y + 2y^3 + 2y^4 +$$

$$+ 2y + 2y^2 + 2y^3 + 2y^5$$

$$2y^5 + y^4 - 7y^3 - 7y^2 + y + 2 = 0$$

وجهی که منتهی میشود بمخلوطی از درجهٔ ششم

$$xy + xy^2 = 12.$$

$$x^6 + x^3y^3 = 14$$

$$x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 + x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 +$$

$$+x^{22}y^{22}+x^{22}y^{22}+2x^{23}y^{23}=x^{1}+2x^{23}y^{23}+x^{19}y^{19}$$

$$\frac{4x^{22}y^{22}+9x^{22}y^{22}+18x^{22}y^{22}}{2}=x^{2}+x^{23}y^{23}+2x^{23}y^{23}$$

$$9x^{22}y^{22}+9x^{22}y^{22}+18x^{22}y^{22}=4x^{2}+2x^{23}y^{23}+2x^{23}y^{23}$$

$$9y^{2}+9y^{2}+18y^{3}=4+4y^{2}+4y^{3}$$

$$4y^{4}-9y^{2}-10y^{3}-9y^{2}+4=0$$

بهمان طریق که جستجو نمودیم بجهت تعیین y میتوانیم جستجو نمائیم
بجهت تعیین x و غیر از وجوه مذکوره وجوه دیگر نیز بسیار است
ولیکن ما بهمین قدر اکتفا نمودیم مخفی نماند که چون عمل جبری
منتهی شود بمخلوطی از درجه سیم و بالاتر اهل اوربا دیگر تصرف
در آن نمینمایند جز تصرفی مخصوص که در حل مخلوطی از آن درجه
بیان نموده اند و آن تصرف بغایت صعب و مشکل است و باز حمت زیاد
جواب حاصل میشود ولکن ما بعنایت الله تعالی و حسن تربیت بندگان
اقدس شهریاری خلد الله ملکه ماهر شدیم بیک قاعده بسیار سهل که
جاری میشود در جمیع معادلات از هر درجه که بوده باشد و نامیدیم
او را بقاعده تحویل و آن قاعده این است
که در یکساله هرگاه عمل نمائیم تا آنکه منتهی شود بمخلوطی از درجه
m بعد بطریق دیگر عمل میکنیم تا آنکه منتهی شود بمخلوطی از

درجه $m+n$ یا $m-n$ حال تقسیم میکنیم
مخلوطی درجه بزرگتر را بر مخلوطی درجه کوچکتر و در میان این
مقسوم و مقسوم علیه یکی از سه نسبت یافت می شود یا تداخل یا
توافق یا تباین اما تداخل این است که تقسیم میکنیم مخلوطی درجه
بزرگتر را بر مخلوطی از درجه کوچکتر خارج قسمت یکمقدار کاملی است
بی کسر که مساوی صفر است زیرا که مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر
بودند پس هرگاه این خارج قسمت یک تساوی مخلوطی از درجه دوم
باشد عمل میکنیم و ریشهای او را معلوم میکنیم و بواسطه این ریشها
ریشهای مقسوم و مقسوم علیه را نیز تعیین میکنیم و هرگاه خارج قسمت
از درجه دوم نباشد پس بواسطه او و مقسوم و مقسوم علیه یک تساوی
دیگر حاصل میکنیم و هم چنین عمل میکنیم تا منتهی شود بمخلوطی از درجه
دوم یا اول اما توافق این است که خارج قسمت یکمقدار
صحیح کاملی نیست مثل صحیح و کسر است پس جستجو میکنیم وفق آنها را
یعنی مقسوم علیه مشترکی میان این دو تساوی بعد تقسیم میکنیم مقسوم
و مقسوم علیه را بر این مقدار مشترک و این دو خارج قسمت نیز مساوی
صفر اند پس اگر از درجه اول یا دوم باشند که ریشهای آنها را معین
میکنیم و اگر از درجه سیم یا بالاتر باشند نیز همین طریق عمل میکنیم تا
منتهی

منتهی شود بدرجه دویم یا اول اما تباین این است که نه خارج
قسمت کاملی حاصل شود و نه مقسوم علیه مشترک یافت شود پس در
این حالت بواسطه این دو تساوی نمیتوانیم تحویل حاصل نمائیم باید
نیز بطریق دیگر عمل کنیم تا یک تساوی دیگر حاصل شود و بواسطه
این تساویها عمل کنیم تا منتهی شود بدرجه اول یا دویم سبب
تداخل اینست که مخلوطی درجه بزرگتر حاوی است جمیع ریشهای
درجه کوچکتر را بعلاوه چند ریشه دیگر و سبب توافق
اینست که بعضی از ریشها مشترک هستند و بعضی مختص و سبب
تباین این است که هیچ ریشه یافت نمیشود که مشترک باشد
ما بین این دو تساوی و نتیجه می بخشد که عده جوابهای مسئله
مساوی است بحاصل جمع ریشهای آن دو تساوی و بجهة
توضیح این مطالب میگوئیم چونکه چند وجه از وجوه حل تساوی
مذکوره منتهی شده است به تساوی مخلوطی از درجه سیم و چند وجه نیز
بتساوی مخلوطی از درجه چهارم پس میکنیم اخیر را که این است
$y^4 - 2y^3 - 9y^2 - y + 2 = 0$ براوی که این است
$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$ بعد از تقسیم خارج قسمت $y + 1$
میشود یعنی $2y^4 - y^3 - 9y^2 - y + 2 : 2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = y + 1$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی
صفر میشود یعنی $y+1=0$ و نیز تقسیم میکنیم نشانی مخلوطی از
درجه سیم را باین خارج قسمت بعد از تقسیم خارج قسمت $2y^2-5y+2$
میشود یعنی $2y^2-5y+2 : y+1 = 2y^3-2y^2-3y+2$
وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی
صفر میشود یعنی $2y^2-5y+2=0$ پس تحویل نمودیم نشانی مخلوطی از
درجه چهارم را بمخلوطی از درجه دوم و همچنین یک نشانی منتهی شده بود
از درجه پنجم پس تقسیم میکنیم او را بمخلوطی از درجه چهارم خارج قسمت
$y+1$ میشود یعنی $2y^5-y^4-9y^3-9y^2+10y+4 : 2y^4-7y^3-7y^2+7y+2 = y+1$
وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی
صفر میشود یعنی $y+1=0$ و این راجع شد بطریق اول پس تحویل نمودیم
نیز مخلوطی از درجه پنجم را بدرجه دوم و نیز یکوجه منتهی شده بود بمخلوطی از
درجه ششم در اینجا بدو طریق میتوانیم تحویل کنیم تا آنکه تقسیم میکنیم او را
بمخلوطی از درجه هفتم خارج قسمت $2y^3+3y^2+3y+2$
میشود یعنی $2y^6-5y^5+2y^4-3y^3-3y^2+2 : 2y^3-3y^2-3y+2 = 2y^3+3y^2+3y+2$
وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی

صفر

صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی صفر میشود یعنی

$۲y^{۵} + y^{۳} + ۳y^{۲} + ۲y + ۲ = ۰$ بعد تقسیم میکنیم نیز عین تساوی مخلوطی

در جبر ششم بمخلوطی از درجه چهارم باین طریق $۲y^{۶} - ۹y^{۴} - ۱۰y^{۳} - ۹y^{۲}$

$-۹y^{۲} + ۴ : ۲y^{۵} - y^{۳} - ۶y^{۲} - y + ۲ = ۲y^{۲} + y + ۲$

وخارج قسمت نیز مساوی صفر است یعنی $۲y^{۲} + y + ۲ = ۰$

حال تقسیم میکنیم خارج قسمت اول را باین خارج قسمت حاصل میشود

بعد از تقسیم $y + ۱$ باین طریق

$۲y^{۳} + ۲y^{۲} + ۳y + ۲ : ۲y^{۲} + y + ۲ = y + ۱$

واین خارج قسمت نیز مساوی صفر است پس عمل راجع شد بطریق اول

ثانی بعد از مجزود کردن مخلوطی درجه سیم این تساوی حاصل است

$۲y^{۶} - ۱۲y^{۵} - ۳y^{۴} + ۲۶y^{۳} - ۳y^{۲} - ۱۲y + ۴ = ۰$

حال تفریق میکنیم این تساوی را از تساوی اول باین طریق

$+۴y^{۶} + ۰ - ۹y^{۴} - ۱۰y^{۳} - ۹y^{۲} + ۰ + ۴ = ۰$

$\pm ۴y^{۶} \mp ۱۲y^{۵} \mp ۳y^{۴} \pm ۲۶y^{۳} \mp ۳y^{۲} \mp ۱۲y \pm ۴ = ۰$

$۱۲y^{۵} - ۶y^{۴} - ۳۶y^{۳} - ۶y^{۲} + ۱۲y = ۰$

$۲y^{۴} - y^{۳} - ۶y^{۲} - y + ۲ = ۰$

واین عمل منتهی شد بمخلوطی درجه چهارم و کیفیت تحویل نمودن آن

تفصیل ذکر شد سابقا پس تحویل نمودیم یک مخلوطی از درجه ششم را
بمخلوطی از درجه دویم وهو المطلوب وهم چنین هرگاه تقسیم کنیم مخلوطی
درجه پنجم را بدرجه سیم خارج قسمت $y^2+2y+1=0$
میشود یعنی $y^5+2y^4-2y^3-3y^2+2y+2 : y^3-y^2-2y+2 = y^2+2y+1$
واین خارج قسمت یکجذر حقیقی است $y+1$ وباقی عمل سابقا
مذکور شد وحالت توافق از تقریر این اعمال واضح است اما حالت تا
ظاهر خواهد شد در تمثال آینده

$$xy+xy^2+xy^3=28.$$
$$x+xy^4+xy^5=98.$$

$$\frac{x+xy+xy^2+xy^3+xy^4+xy^5}{x-xy-xy^2-xy^3+xy^4+xy^5}=\frac{63}{35}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{1+y+y^2+y^3+y^4+y^5}{1-y-y^2-y^3+y^4+y^5}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{(y^2+y+1)(y^3+1)}{(y^2+y-1)(y^3-1)}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{(y^2+y+1)(y^3+1)}{(y^2+y-1)(y^2+y+1)(y-1)}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{y^3+1}{(y^2+y-1)(y-1)}=\frac{9}{5}.$$

$$9y^3-18y+9=5y^3+5$$
$$4y^3-18y+4=0$$
$$2y^3-9y+2=0$$
$$(2y^2+4y-1)(y-2)=2y^3-9y+2.$$
$$y=2$$
$$y^2+2y=\frac{1}{2}$$
$$y=-1\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}.$$

تمثال ۱۳۰ : در استخراج مجاریف

$$xy + xy^2 + xy^3 = 28.$$
$$x + xy^4 + xy^5 = 98.$$
$$xy^5 + xy^4 + xy^3 = 28y^2.$$
$$-xy^5 \pm xy^4 \pm x = -98.$$

$$xy^3 - x = 28y^2 - 98.$$

$$x(y^2 + y + 1)(y - 1) = 28y^2 - 98$$

$$xy(y^2 + y + 1) = 28.$$

$$\frac{y-1}{y} = \frac{28y^2 - 98}{28}.$$

$$28y - 28 = 28y^3 - 98y.$$

$$28y^3 - 98y + 28 = 0$$

$$xy + xy^2 + xy^3 = 28.$$
$$x + xy^4 + xy^5 = 98.$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5}{x - xy - xy^2 - xy^3 + xy^4 - xy^5} = \frac{9}{5}.$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5}{1 - y - y^2 - y^3 + y^4 + y^5} = \frac{9}{5}.$$

$$5 + 5y + 5y^2 + 5y^3 + 5y^4 + 5y^5 =$$
$$= 9 - 9y - 9y^2 - 9y^3 + 9y^4 + 9y^5.$$
$$2y^5 + 2y^4 - 7y^3 - 7y^2 - 7y + 2 = 0$$

هرگاه تقسیم کنیم مخلوطی درجه پنجم را بر مخلوطی درجه سیم بعد از تقسیم خارج
قسمت این $y^2 + y + 1 = 0$ میشود حال هرگاه در مخلوطی
درجه سیم و این خارج قسمت تامل کنیم معلوم میشود که نسبت بتا بین دارند
زیرا که نه خارج قسمت کاملی و نه مقسوم علیه مشترکی یافت میشود پس بواسطه
این دو تساوی بخود یا حاصل نمیشود باید باستعانت یکتساوی دیگر
تحویل کنیم و باید دانست که هر قدر در مسئله مجهول زیادتر باشد که
تحصیل جواب بقواعد دیگر مشکل است مجال تصرف در این قاعده
بیشتر است و زودتر بجواب میتوان رسید و در هر مسئله که یک
مجهول زیاده نباشد این قاعده در آن جاری نمیشود زیرا که زیاده
از یک تصرف قبول نمیکند و لامحاله منتهی میشود بدرجه مخصوصی و
چونکه مقصود ما در این رساله بانجام رسید ختم آن بدعای پادشاه
دین پناه لازم نمود خلد الله ملکه واعز جنده وافاض علی البریة
بره بقیت بقاء الدهر ما یکف اهله وهذا دعاء للبریة شامل
همیشه تا که بر افلاک انجمن پدید همیشه تا که بر ارواح قائمند اجسا
مباد جز بهوای تو گردش گردون
مباد جز بمکان تو جنبش ایام
آمین آمین
آمین